Uma relação entre sincronização no mapa do círculo e os números racionais

Mariana P. M. A. Baroni
Elbert E. N. Macau
Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE
São José dos Campos, SP
E-mail: mariana@lac.inpe.br e elbert@lac.inpe.br

Resumo

Um dos fenômenos mais interessantes da dinâmica não-linear é o de sincronização entre dois osciladores, que se caracteriza pelo fenômeno de travamento de freqüência. Seja o caso de um pêndulo sob a ação de uma força externa periódica. O fenômeno do travamento de freqüência acontece quando a razão entre as freqüências de oscilação do pêndulo e da força externa torna-se travados na razão p/q de dois inteiros, dentro de algum intervalo finito de valores de parâmetros. Neste trabalho foi usado o mapa do círculo para caracterizar esse fenômeno. Através dele é possível obter duas estruturas: a Escada do Diabo e Arnold Tongues. Em ambas é possível verificar a sincronização e estabelecer uma relação entre o fenômeno e os números racionais e irracionais.

1. Introdução e Motivação

Um dos fenômenos mais interessantes da dinâmica não-linear é o de sincronização entre dois osciladores que se caracteriza pelo fenômeno de travamento de freqüência que se mantêm robusto dentro de um limite de variações de parâmetros. Seja o caso de um pêndulo sob a ação de uma força externa periódica. O fenômeno do travamento de freqüência acontece quando a razão de freqüência do pendulo para da força externa torna-se travado está na razão *p/q* de dois inteiros, acima de algum domínio finito de valores de parâmetros[1].

Este fenômeno é similar ao observado por Christian Huygens no século dezessete: a sincronização de dois relógios em uma mesma parede. Um acessório comum às duas paredes pode ter fornecido um acoplamento dos relógios para cada um[1].

Este trabalho estabelece uma relação entre a sincronização e os números racionais e irracionais, através do estudo das estruturas: Escada do Diabo e *Arnold Tongues* obtidas através do Mapa do Círculo.

2. O Mapa do Círculo

Este fenômeno de sincronização pode ser adequadamente modelado pelo mapa do círculo[1]. A equação de diferenças de um mapa do círculo conhecido como mapa padrão é:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - (K/2\pi)\sin(2\pi\theta_n) \mod 1$$

O parâmetro Ω é a freqüência de rotação (número de rotação) na ausência de não-linearidade. Esse acoplamento não linear pode modificar o ângulo por interação[4].

Para uma certa série de amplitudes forçadas e freqüências, um mapa do círculo pode ser uma razoável aproximação para um pêndulo excitado por uma força externa periódica[1].

3. Número de Rotação

Para obtermos um sentido do comportamento do mapa padrão, omitiremos o termo não-linear ajustando $K = 0$. O mapa reduz-se à

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega$$

Usaremos os valores $\Omega = 0.4, 0.404004...$, $K = 0.95$ e condição inicial $\theta_0 = 0.3$ para exemplificar o comportamento deste mapa.

Para $\Omega = 0.4$ e $K = 0$ com $\theta_0 = 0.3$, temos:

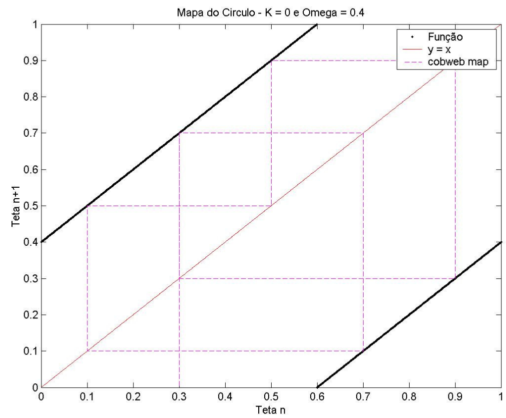


Figura 1: Mapa do círculo com $\Omega = 0.4$ e $\theta_0 = 0.3$

Percebe-se, na Figura 1, que após cinco iterações, retornamos a condição inicial, tendo feito duas voltas. O número de rotação, *W*, é *2/5*, igual a Ω. Neste caso, temos um movimento periódico.

Para $\Omega = 0.4040040004...$ e $K = 0$ com $\theta_0 = 0.3$, temos:

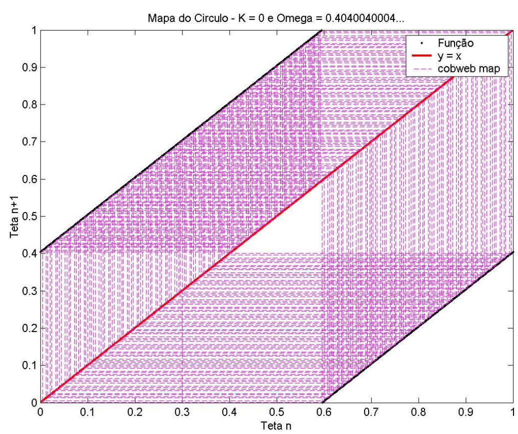


Figura 2: Mapa do círculo com $\Omega = 0.4040040004...$ e $\theta_0 = 0.3$

A Figura 2, após 200 iterações, mostra um movimento quase-periódico onde θ não retorna exatamente a condição inicial, mas essa órbita permanece fechada no intervalo [0,1]. Neste caso, o número de rotação é irracional ($W=\Omega$).

Para $\Omega = 0.4040040004...$ e $K = 0.95$ com $\theta_0 = 0.4$, temos:

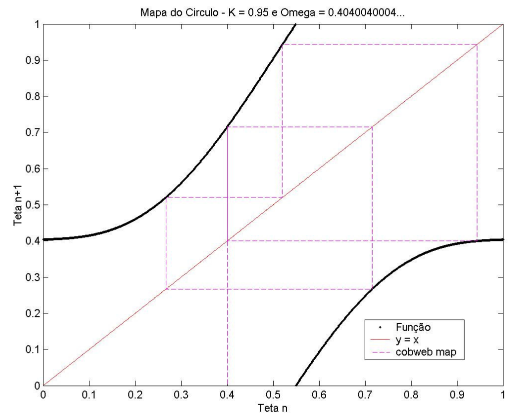


Figura 3: Mapa do círculo com $\Omega = 0.4040040004...$, $K=0.95$ e $\theta_0 = 0.4$

Neste caso, apesar de Ω ser um número irracional, o movimento apresentou periodicidade, pois em $K=0.95$ o mapa é ainda inversível[1].

Logo, temos que se o número de rotação é um número racional, então o mapa é cíclico ou periódico (como na Figura 1). Se o número de rotação for um número irracional, então θ não retorna exatamente a condição inicial e o movimento é denominado quase-periódico (Figura 2). O ângulo vem arbitrariamente fechando para algum valor particular se n é suficientemente grande. Travamento de freqüência ocorre quando o termo não-linear é adicionado, sustentando o movimento periódico inclusive quando Ω for irracional (Figura 3).

Além disso, percebe-se na Figura 3 que o movimento se repete após cinco iterações. O número de rotação mede a mudança média de fase por iteração. Para $K \neq 0$, ele não é igual a Ω, sendo definido geralmente como:

$$W = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\theta_n - \theta_0}{n}\right)$$

O termo não-linear evidentemente muda a forma de representação da função. Note que para $K = 0.95$, o mapa ainda é inversível.

4. Números Racionais e Sincronização: Arnold Tongues e Escada do Diabo

Há um número infinito de intervalos de travamento de freqüência. Há também um número infinito de números de rotação racionais. Conforme Ω varia em *K* fixo, o mapa mostra os movimentos periódicos e quase-periódicos[1]. Esse comportamento, onde as larguras em Ω das várias regiões onde o número de rotação varia conforme aumenta *K*, é mostrado na Figura 4. Esse resultado é chamado de

“Arnold tongues” em homenagem ao matemático russo que descobriu essa estrutura.

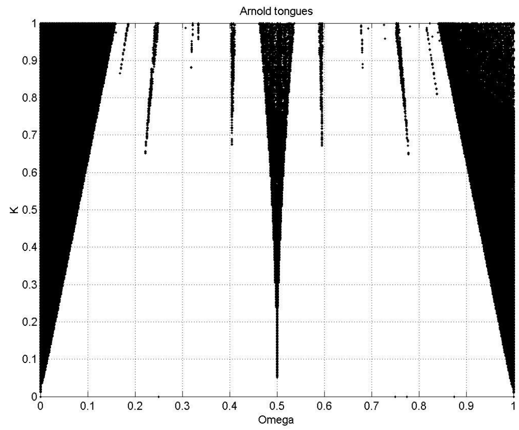


Figura 4: Arnold Tongues

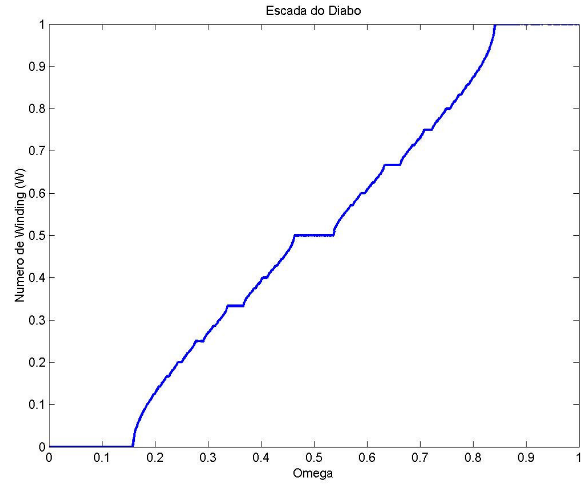
Nessa figura, os pontos pretos são o movimento periódico (número de rotação racional) e os pontos brancos, o movimento quase-periódico (número de rotação irracional).

Para $0 < K < 1$ o número de rotação fica em cada número racional p/q em um intervalo não-nulo de omega.

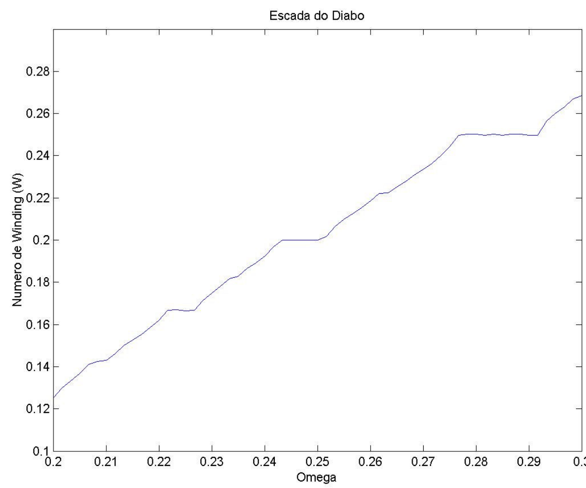
Para $K = 0$, todos os intervalos são pequenos, assim a probabilidade que o número de rotação para um valor randômico de Ω racional é quase zero, isto é, a probabilidade de acertar ao acaso um número de rotação irracional é quase um. Entretanto com o aumento de K, a largura de todos os intervalos de travamento de freqüência aumenta, assim para $K = 1/2$ a probabilidade de observarmos números de rotação racionais e irracionais são quase iguais (Figura 4).

Para $K \sim 1$ a probabilidade de encontrarmos um número de rotação racional é quase 1.

Em $K = 1$ o conjunto dos intervalos racionais é um fractal, um conjunto de Cantor de medida zero[4]. Fazendo W versus Ω, temos uma curva que mostra a repetição de padrões. Tal curva é dita auto-similar. Essa estrutura é chamada Escada do Diabo.



a)



b)

Figura 5: Escada do diabo. a) $0 < \Omega, K < 1$, b) Zoom ($0.2 < \Omega < 0.3$ e $0.1 < K < 0.3$)

Essa repetição de padrões corresponde aos números de rotação racionais. Ela representa a sincronização dos dois osciladores. Entre duas soluções periódicas, caracterizadas por números de rotação racionais, existe uma solução periódica com um período mínimo[4].

O mapa desenvolve mínimo e máximo local e, portanto torna-se não inversível para $K > 1$ (Figura 6), uma condição necessária para comportamento caótico[1]. Como conseqüência caos pode ser observado para alguns valores de Ω, onde a serie comporta-se irregularmente.

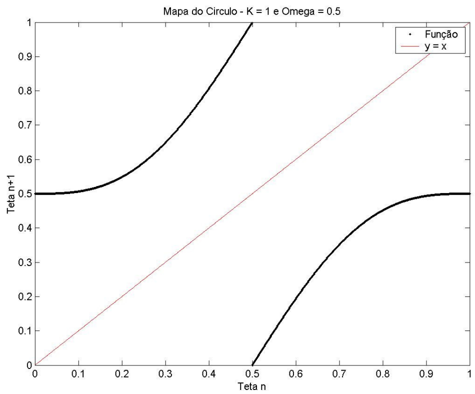


Figura 6: Mapa do círculo com $\Omega = 0.5$ e $K = 1$.

5. Racionais e Irracionais: um método numérico

Como já vimos anteriormente, quando o número de rotação é racional, temos movimento periódico (sincronização) e quando ele é irracional temos movimento quase-periódico. Para a visualização desse comportamento usa-se a estrutura ‘Arnold Tongues’, que é um espaço de parâmetros (Ω, K). Nessa estrutura (Figura 4), marcou-se o movimento periódico com pontos pretos e o movimento quase-periódico com pontos brancos. Desta forma, os pontos pretos são os números de rotação racionais, assim como os pontos brancos são os números de rotação irracionais.

Mas como implementar um algoritmo para diferenciar os números racionais dos números irracionais?

O conjunto dos números racional é definido como o conjunto dos números que podem ser obtidos como frações, ou seja, todo número que pode ser colocado na forma p/q onde p e q são números inteiros e $q \neq 0$. Já os números irracionais são aqueles que não podem ser colocados nessa forma[3].

No conjunto dos números racionais estão os números inteiros, os decimais e as dízimas periódicas. As representações decimais de um racional são necessariamente de dois tipos: ou possuem uma quantidade finita de casas decimais, ou “terminam” em uma dízima periódica. Logo, uma representação decimal para um número irracional tem necessariamente que ser uma dízima não-periódica[3].

Isto significa que podemos dispor os números racionais numa sucessão da forma $r_1, r_2, r_3, \ldots$ com uma infinidade de elementos. Pode-se interpretar este fato dizendo-se que a quantidade de números racionais, embora sendo infinita, é uma ordem de infinitude equivalente a dos números naturais (o argumento para a demonstração desse fato é devido a Georg Cantor). Essa representação como fração p/q é única com p e q inteiros positivos primos entre si, basta que saibamos enumerar os pares ordenados (p, q) de naturais primos entre si[3].

Todo número irracional positivo possui uma representação decimal única por meio de uma dízima não-periódica. Isto significa que não podemos dispor os números irracionais numa sucessão, mesmo admitindo uma infinitude de elementos. Diferentemente dos racionais, a ‘ordem de infinitude’ da quantidade dos números irracionais é maior que a dos números naturais. Daí pode-se concluir que existem muito mais números irracionais do que racionais[3].

Usando o fato do período nas dízimas para números racionais, podemos estabelecer um método para encontrarmos números racionais e irracionais, estabelecendo uma exatidão na busca para valores racionais.

5.1. Reproduzindo a Escada do Diabo

Para a obtenção da escada do Diabo, que representa a as soluções periódicas e quase-periódicas do número de rotação para K fixo e Ω variando, aplicou-se o mapa do círculo para $K = 1$ e $\Omega = [0, 1]$ desprezando os transientes iniciais (Figura 5).

5.2. Reproduzindo *Arnold Tongues*

Para a obtenção da estrutura ‘Arnold Tongues’ necessita-se, na obtenção da escada do Diabo, variar também o K. Neste caso, vamos utilizar $K = [0,1]$. Logo, a escada do Diabo em duas dimensões é:

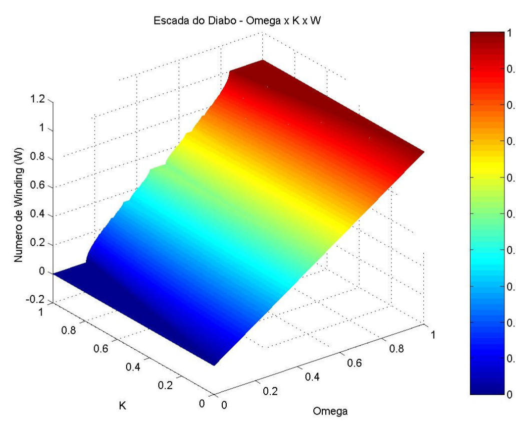


Figura 7: Escada do Diabo em duas dimensões

Assim, com a matriz formada pelos números de rotação obtidos variando K e Ω, podemos tentar encontrar nela quais deles são racionais.

Sabe-se que os números racionais e irracionais encontrados para compor a estrutura *Arnold Tongues* estão dentro do intervalo *[0, 1]*. Assim, para encontrar os números racionais se trabalhará com o período das dízimas, ou seja, sabe-se que os números racionais ou são inteiros (que não é o caso), ou são decimais ou são dízimas com período finito.

Assim foi feita uma busca no intervalo *[0, 1]*, comparando cada elemento desse intervalo (com um intervalo de 10^{-3}) com todos os valores da matriz de números de rotação, procurando valores dentro de uma determinada precisão.

Por exemplo, suponhamos que nossa matriz de números de rotação seja:

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.967854358.... & 0.4 \\ 0.89573216... & 0.3 & 0.889278963258... \\ 0 & 0.2 & 1 \end{bmatrix}$$

e a nossa precisão seja 10^{-5}.

Nosso primeiro valor do intervalo *[0, 1]* é *0*. Então buscaremos os valores tais que sejam maiores ou iguais a ($0\text{-}10^{-5}$) e menores ou iguais a ($0+10^{-5}$). Assim procuremos os índices da matriz, pois cada coluna corresponde a valor de Ω e cada linha corresponde a um valor de K, que correspondem a esse intervalo [$0\text{-}10^{-5}, 0+10^{-5}$] ao redor de zero. Dessa forma estamos procurando a região onde há sincronização. Na nossa matriz o único valor é 0 que corresponde à posição *(3,1)* da matriz. Assim esse ponto que aparecerá na estrutura. O próximo passo pode ser ao redor de *0,1*, ou seja, os valores da matriz que estão no intervalo [$0.1\text{-}10^{-5}, 0.1+10^{-5}$], e assim sucessivamente. O último passo será ao redor de *1*, ou seja, os valores no intervalo [$1\text{-}10^{-5}, 1+10^{-5}$], onde o método encontrará a posição *(3,3)*.

Desta maneira, estaremos encontrando os números racionais que possuem representação única como fração (decimais e dízimas periódicas). A adoção da precisão decorre dos períodos das dízimas periódicas, ou seja, para 10^{-5} temos dízimas com período *5*. Assim há a necessidade de maior precisão.

6. Conclusão

Através do mapa círculo, pode-se investigar a sincronização de dois osciladores.

Essa sincronização pode ser vista na estrutura da Escada do Diabo, que apresenta os períodos de sincronização, na repetição dos padrões. Esses períodos de sincronização são números de rotação racionais (movimento periódico). Quando temos número de rotação irracional, temos um movimento quase-periódico, e não há sincronização.

Esse fenômeno pode ser observado em diferentes tipos de mapas que representam sistemas dinâmicos. Mas é muito mais fácil identificar soluções periódicas, quase-periódicas, e caóticas iterando o mapa do que por uma integração numérica, por exemplo, de uma equação diferencial.

Agradecimentos:

Os autores agradecem a CAPES e a FAPESP.

Referências:

[1] Baker, G. L. & Gollub, J. P. *Chaotic Dynamics: An Introduction*, 2nd ed., Cambridge, 1996.

[2] Calvo, O., Cartwright, J. H. E., Gonzalez, D. L., Piro O. & Rosso, O. A., “Three-Frequency Resonances in Dynamical Systems”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol 9, n. 11, 1999, 2181-2187.

[3] Frid, H., “Os números irracionais”, Notas de aula, *IMPA*, 1998.

[4] Jensen, M. H., Bak P. & Bohr T., “Transition to chaos by iteraction of resonances in dissipative systems. I. Circle maps”, *Physical Review A*, vol.30, n.4, 1984, 1960-1969.